



TITLE:

# Analyticity of certain Dirichlet series(Transcendental Numbers and Related Topics)

AUTHOR(S):

高瀬, 幸一

---

CITATION:

高瀬, 幸一. Analyticity of certain Dirichlet series(Transcendental Numbers and Related Topics). 数理解析研究所講究録 1986, 599: 108-118

ISSUE DATE:

1986-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99584>

RIGHT:

Analyticity of certain Dirichlet series.

東工大・理学部 高瀬幸一 (Koichi Takase)

§1. 問題 有限次代数体  $F$  に対し,  $\Phi$  を automorphic form on  $GL(2)$  over  $F$  とする。(automorphic form on  $GL(2)$  の一般論については Weil [13] を参照).  $\Phi$  は Hecke eigen form であるとして,  $T(\mathfrak{a})\Phi = \lambda(\mathfrak{a})\Phi$  とする ( $\mathfrak{a}$  は  $F$  の integral ideal).  $\Phi$  に附随する standard L-function と

$$\begin{aligned} L(s, \Phi) &= \sum_{\mathfrak{a}} \lambda(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{a})^{-s} \\ &= \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \lambda(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{-s} + N(\mathfrak{p})^{1-2s})^{-1} \quad (s \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

とする。ここで  $\sum_{\mathfrak{a}}$  は  $F$  の integral ideal  $\mathfrak{a}$  の上にとり、 $\prod_{\mathfrak{p}}$  は  $F$  の prime ideal  $\mathfrak{p}$  の上にとり、 $N(\mathfrak{a})$  は ideal  $\mathfrak{a}$  の絶対ノルムである。  $L(s, \Phi)$  は  $\text{Re } s \gg 0$  で絶対収束し、全  $s$ -平面上へ有理型関数として解析接続される。そこで問題は、

問題 Dirichlet series  $\sum_{0 < n \in \mathbb{Z}} \lambda(n) \cdot n^{-s}$  は全  $s$ -平面上へ解析接続されるか?

結論を先に言えば、 $(F:\mathbb{Q})=2$  の場合は肯定的、 $(F:\mathbb{Q})=3$  の場合

に否定的である。

§2. 2次体の場合. この § では  $F/\mathbb{Q}$  は 2次拡大であるとして,  
§1 の記号を用いる.  $F$  の prime ideal  $\mathfrak{f}$  に対して, 複素数  $a(\mathfrak{f}), b(\mathfrak{f})$   
を,  $a(\mathfrak{f}) + b(\mathfrak{f}) = 1$ ,  $a(\mathfrak{f}) \cdot b(\mathfrak{f}) = N(\mathfrak{f})$  により定めると, 内題の  
Dirichlet series は次の様な Euler 積表示をもつ:

$$\zeta(2s-2) \cdot \sum_{0 < n \in \mathbb{Z}} \Lambda(n) \cdot n^{-s} = \prod_p H_p(p^{-s})^{-1}$$

ここで,  $\prod_p$  は素数  $p$  上の積として,

$$H_p(T) = \begin{cases} (1-p^2 T^2)(1-a \cdot T)(1-b \cdot T) & \text{if } (p) = \mathfrak{f} \text{ in } F \\ (1-a \cdot a' \cdot T)(1-a \cdot b' \cdot T)(1-b \cdot a' \cdot T)(1-b \cdot b' \cdot T) & \text{if } (p) = \mathfrak{f} \mathfrak{f}' \text{ in } F \\ (1-pT)(1-a^2 \cdot T)(1-b^2 \cdot T) & \text{if } (p) = \mathfrak{f}^2 \text{ in } F \end{cases}$$

とする ( $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{f}'$  は  $p$  上の  $F$  の prime ideal で,  $a = a(\mathfrak{f}), b = b(\mathfrak{f}), a' = a(\mathfrak{f}')$   
 $b' = b(\mathfrak{f}')$  とした)。

Prop. 1 重が  $\text{unr form}$  であれば, Dirichlet series  $\sum_{0 < n \in \mathbb{Z}} \Lambda(n) \cdot n^{-s}$  は,

全  $s$ -平面に有界型関数として解析接続される。

証明  $F$  が実 2 次体の場合には, Asai [1] により示された。

証明の概要は次の通り。まず重は  $\text{adèle 群 } GL(2, F_A)$  上で定義され  
てゐるとして, 重を  $GL(2, F_A)$  の infinite part に制限することにより,  
 $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$  上の automorphic form  $\psi$  が得られる。一方  
 $SL(2, \mathbb{R})$  を写像  $g \mapsto (g, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$  により  $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$

の部分群を考えると,  $\psi$  を  $SL(2, \mathbb{R})$  に制限したものを  $f$  とする.

$$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}), \quad \Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$$

として,  $SL(2, \mathbb{R})$  上の Eisenstein series

$$E(g, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} |\alpha(\gamma g)|^{-s} \quad \text{for } g \in SL(2, \mathbb{R}), s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s \gg 0$$

(但し,  $\alpha(g) = c\sqrt{1+d}$  for  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ ) と  $f$  との Rankin convolution により 内題の Dirichlet series が生ずる. 一方  $E(g, s)$  は, 全  $s$ -平面に有理解型関数として解析接続されるから, これにより 内題の Dirichlet series の解析接続を得る.

$F$  が虚 2 次体の場合にも, 同様の方法で示される. この場合には,  $SL(2, \mathbb{C})$  への  $SL(2, \mathbb{R})$  の自然な埋め込みを用いればよい (Takase [10] 参照).

§3. 3 次体の場合. この § では,  $F/\mathbb{Q}$  は 3 次巡回拡大であるとす. Galois 群  $\operatorname{Gal}(F/\mathbb{Q})$  の指標群の生成元を  $\chi$  として,  $F/\mathbb{Q}$  の絶対判別式を  $D$  とする.

$f$  を Hecke eigen cuspidal automorphic form on  $GL(2)$  over  $\mathbb{Q}$  とすると, base change lifting の一般論により (Langlands [7]),  $\hat{f}$  なる Hecke eigen automorphic form on  $GL(2)$  over  $F$  があって,

$$L(s, \hat{f}) = \prod_{i=0}^2 L(s, f, \chi^i)$$

となる. ここで

$$L(s, \hat{f}) = \sum_{(n, D)=1} \hat{\lambda}(n) \cdot N(n)^{-s} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid D} \hat{H}_{\mathfrak{p}}(N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

$$\hat{H}_{\mathfrak{p}}(T) = 1 - \hat{\lambda}(\mathfrak{p})T + N(\mathfrak{p}) \cdot T^2 = (1 - \alpha(\mathfrak{p}) \cdot T)(1 - \beta(\mathfrak{p}) \cdot T)$$

で、 $\sum_{(n, D)=1}$  は  $D$  と互に素な  $F$  の integral ideal  $n$  上の和、 $\prod_{\mathfrak{p} \nmid D}$  は  $D$  を割らない  $F$  の prime ideal  $\mathfrak{p}$  上の積、 $\hat{\lambda}(n)$  は  $\hat{f}$  の Hecke eigen value (i.e.  $T(n) \cdot \hat{f} = \hat{\lambda}(n) \cdot \hat{f}$ ) とする。又、

$$L(s, f, \chi^j) = \sum_{(n, D)=1} \lambda(n) \cdot \chi^j(\sigma_n) \cdot n^{-s} = \prod_{p \nmid D} H_p(\chi^j(\sigma_p) \cdot p^{-s})^{-1}$$

$$H_p(T) = 1 - \lambda(p)T + p \cdot T^2 = (1 - \alpha_p \cdot T)(1 - \beta_p \cdot T)$$

で、 $\sum_{(n, D)=1}$  は  $D$  と互に素な有理正整数  $n$  上の和、 $\prod_{p \nmid D}$  は  $D$  を割らない有理素数  $p$  上の積、 $\lambda(n)$  は  $f$  の Hecke eigen value (i.e.  $T(n)f = \lambda(n)f$ )、 $\sigma_p \in \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  は素数  $p$  に対応する Frobenius automorphism とする。

上の関係式から、 $D$  を割らない有理素数  $p$  と、 $p$  上の  $F$  の prime ideal  $\mathfrak{p}$  に対応して、

$$\hat{\lambda}(\mathfrak{p}) = \begin{cases} \lambda(p^3) - p \cdot \lambda(p) & \text{if } \sigma_p \neq 1 \\ \lambda(p) & \text{if } \sigma_p = 1 \end{cases}$$

となる。よって、 $D$  を割らない有理素数  $p$  に対応して、

$$\sum_{e \geq 0} \hat{\lambda}(p^e) \cdot T^e = H_{B,p}(p \cdot T) \cdot \tilde{H}_p(T)^{-1}$$

$$\tilde{H}_p(T) = (1 - \alpha_p^3 \cdot T)(1 - \alpha_p^2 \cdot \beta_p \cdot T)(1 - \alpha_p \cdot \beta_p^2 \cdot T)(1 - \beta_p^3 \cdot T)$$

$$H_{B,p}(T) = 1 + (\chi^2(\sigma_p) + \chi(\sigma_p)) \cdot \lambda(p) \cdot T + p \cdot T^2$$

となる。  $F > \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{(n, D)=1} \hat{\lambda}(n) n^{-s} = L_B(s-1, f)^{-1} \cdot L(s, f, \text{Sym}^3)$$

$$L_B(s, f) = \prod_{p \nmid D} H_{B, p}(p^{-s})^{-1}, \quad L(s, f, \text{Sym}^3) = \prod_{p \nmid D} \tilde{H}_p(p^{-s})^{-1}$$

となる。

Langlands [6] により示されたことであるが、 $L(s, f, \text{Sym}^3)$  は全  $s$ -平面上へ有理型関数として解析接続される。以下では、 $L_B(s, f)$  の解析性を、Kurokawa [4, 5] の一般論を用いて考察する。

まず始めに、 $f$  が  $\mathbb{Q}$  の Weil group の 2 次元表現に対応している場合を考える。 $\mathbb{Q}$  の absolute Weil group  $W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  の 2 次元 unitary 表現  $\rho$  があって、 $\rho$  に附随した Artin-Hecke  $L$ -function  $L(s, \rho)$  に對して、 $L(s, f) \doteq L(s - \frac{1}{2}, \rho)$  となるとき、 $f$  は Artin-Hecke type であるという。ここで記号  $\doteq$  は、有限個の Euler factor を除いて一致することを示す。又、右辺で  $s - \frac{1}{2}$  が現われるのは、 $L$ -function  $L(s, f)$  の normalization による。(Artin-Hecke  $L$ -function については、Tate [12] 参照)。Deligne-Serre [3] により示された通り、 $f$  が重  $\leq 1$  の holomorphic cusp form であれば、 $f$  は Artin-Hecke type である。

Lemma 1  $f$  が Artin-Hecke type ならば、 $L_B(s, f)$  は、 $s$ -平面  $\text{Re } s > \frac{1}{2}$  上へ有理型関数として解析接続され、 $\text{Re } s = \frac{1}{2}$  は自然境界となる。

証明 表現  $\rho: W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{U}(2)$  に對して、 $L(s, f) = L(s - \frac{1}{2}, \rho)$  とする。

有理素数  $p$  で、条件 1)  $p \nmid D$  か、表現  $\rho$  は  $p$  で不分岐、2)  $p$  に對して

する "inverse Frobenius" を  $\bar{\epsilon}_p$  とし  $H_p(p^{-\frac{1}{2}} \cdot T) = \det(1 - P(\bar{\epsilon}_p) \cdot T)$ , を満たすもの全体を  $P$  とする。  $W(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  の共役類の全体を  $\text{Conj}(W(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$  とし、  $P \in P$  に対応して  $\bar{\epsilon}_p$  を含む共役類を対応させる写像を  $\alpha: P \rightarrow \text{Conj}(W(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$  とする。 このとき Euler data  $E = (P, W(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \alpha)$  は "complete" である ([4] and [5] part II §2)。 [4, 5] の記号を用いれば

$$L_B(s, f) = L(s - \frac{1}{2}, E, H), \quad H(T) = 1 + (X^2 + X) \cdot \text{tr}(P) \cdot T + T^2$$

ただし、  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  の指標  $\chi$  は  $W(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  の指標と同一視してゐる。

ここで  $H(T)$  は [4, 5] の意味で "unitary" ではない。 よって, [4, 5] の一般論により,  $L(s, E, H)$  は半平面  $\text{Re } s > 0$  上へ有理型関数として解析接続され,  $\text{Re } s = 0$  は自然境界となる。

Lemma 1 より次の命題を得る,

Prop. 2  $f$  が Antin-Hecke type ならば, Dirichlet series  $\sum_{(n, D)=1} \hat{\lambda}(n) \cdot n^{-s}$  は, 半平面  $\text{Re } s > \frac{3}{2}$  上へ有理型関数として解析接続され,  $\text{Re } s = \frac{3}{2}$  は自然境界である。

一般の  $f$  に対応して考察を進めるために, "変形 Sato-Tate 予想" と Ramanujan 予想 を述べる。  $0 < r \in \mathbb{Z}$  と  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  の指標  $\omega$  に対応して,

$$L(s, f, \text{Sym}^r, \omega) = \prod_{p \nmid D} H_{r,p}(\omega(\bar{\epsilon}_p) \cdot p^{-s})^{-1}$$

$$H_{r,p}(T) = \prod_{j=0}^r (1 - \alpha_p^{r-j} \cdot \beta_p^j \cdot T)$$

とおく。このとき、

変形 Sato-Tate 予想 各  $0 < r \in \mathbb{Z}$  と  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  の指標  $\omega$  に對して、適当な  $\Gamma$ -factor (conductor part を含む)  $\Gamma_{r,\omega}(s)$  と  $D$  の素因数  $p$  に對して適当な Euler  $p$ -factor  $H_{r,\omega,p}(T)$  が存在して、

$$Z(s, f, \text{Sym}^r, \omega) = \Gamma_{r,\omega}(s) \times L(s, f, \text{Sym}^r, \omega) \times \prod_{p|D} H_{r,\omega,p}(p^{-s})^{-1}$$

は次の条件 1) 2) 3) を満たす:

- 1)  $Z(s, f, \text{Sym}^r, \omega)$  は全  $s$ -平面上へ正則に解析接続され、 $\text{Re } s = 1 + \frac{1}{2}$  上には  $O$ -点をそなへ、
- 2) 関数方程式  $Z(s, f, \text{Sym}^r, \omega) = \zeta(r, \omega) \cdot Z(r+1-s, \check{f}, \text{Sym}^r, \bar{\omega})$  が成り立つ。  
ここで、 $\zeta(r, \omega)$  は  $r$  と  $\omega$  により定まる絶対値 1 の複素数、 $\check{f}$  は適当な Hecke eigen cuspidal automorphic form on  $\text{GL}(2)$  over  $\mathbb{Q}$  である、
- 3)  $Z(s, f, \text{Sym}^r, \omega)$  は各垂直領域  $a \leq \text{Re } s \leq b$  で有界である。

Langlands による一般的な予想 (Langlands [8] 参照) によれば、generic な  $f$  に對しては、 $L(s, f, \text{Sym}^r, \omega)$  は cuspidal automorphic representation of  $\text{GL}(r+1)$  over  $\mathbb{Q}$  に附随する standard  $L$ -function と ( $\Gamma$ -factor と有限個の Euler factor を除いて) 一致するので、上の "変形 Sato-Tate 予想" は、generic な  $f$  に對しては、正しいと思われる。



Ramanujan 予想 ほとんど全ての有理素数  $p$  に対して

$$|\lambda(p)| \leq 2\sqrt{p} \text{ である.}$$

$f$  が holomorphic new form の場合には,  $f$  に対する Ramanujan 予想は, Deligne [2] により証明された.

Prop. 3  $f$  に対して, "変形 Sato-Tate 予想" と Ramanujan 予想が正しければ, Dirichlet series  $\sum_{(n,D)=1} \hat{\lambda}(n) n^{-s}$  は, 半平面  $\text{Re } s > \frac{3}{2}$  に有理型関数として解析接続され,  $\text{Re } s = \frac{3}{2}$  は自然境界となる.

証明  $D$  を割らない有理素数  $p$  で条件  $|\lambda(p)| \leq 2\sqrt{p}$  を満たすもの全体を  $P$  とする.  $G = \text{SU}(2) \times \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_D)$  とし,  $G$  の共役類の全体を  $\text{Conj}(G)$  とする.  $p \in P$  に対して,  $(\begin{pmatrix} \alpha_p/\sqrt{p} & 0 \\ 0 & \beta_p/\sqrt{p} \end{pmatrix}, \sigma_p)$  を含む共役類を対応させる写像を  $\alpha: P \rightarrow \text{Conj}(G)$  とする (条件  $|\lambda(p)| \leq 2\sqrt{p}$  より,  $|\alpha_p| = |\beta_p| = \sqrt{p}$  となることに注意). このとき  $E = (P, G, \alpha)$  は [4, 5] の意味で Euler data となり, [4, 5] の記号を用いれば

$$L_B(s, f) = L(s - \frac{1}{2}, E, H), \quad H(T) = 1 + (\chi^2 + \chi) \cdot \text{tr}(S_T) \cdot T + T^2$$

となる. ここで  $S_T: G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$  は  $\mathcal{O}$ -因子への projection とし,  $\text{tr}(S_T)$  は表現  $S_T$  の trace (i.e. character) である.  $\chi$  は, 自然に  $G$  の指標と考える.  $H(T)$  は [4, 5] の意味で unitary ではない.

"変形 Sato-Tate 予想" の下で, Euler data  $E$  は "complete" である

([4] and [5] part II Theorem 7). よって, [4, 5] の一般論により,  
 $L(s, E, H)$  は半平面  $\text{Re } s > 0$  に有理型関数として解析接続され,  
 $\text{Re } s = 0$  は自然境界である。

Remark 1. Prop. 2, Prop. 3 で扱った Dirichlet series  $\sum_{(n, D)=1} \hat{\lambda}(n) \cdot n^{-s}$  と,  
 §1 の 問題 で扱った Dirichlet series  $\sum_{0 < n \in \mathbb{Z}} \hat{\lambda}(n) \cdot n^{-s}$  とは, 有限個の Euler  
 factor を除いて一致する。よって, Prop. 2, Prop. 3 は,  $F_{\mathbb{Q}}$  が 3 次拡大  
 の場合に, 問題 に対する否定的例となつてゐる。

Remark 2. "変形 Sato-Tate 予想" の original version について述  
 べる。  $\mathbb{Q}$  上定義された楕円曲線  $E$  に対して, その Hasse  $\zeta$ -function  
 $\zeta(s, E)$  は,

$$\zeta(s, E) \doteq \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot \prod_p' (1 - a_p \cdot p^{-s} + p^{1-2s})$$

となるが,

$$1 - a_p T + p \cdot T^2 = (1 - \pi_p T)(1 - \bar{\pi}_p T) \quad |\pi_p| = \sqrt{p}$$

である。  $\pi_p = \sqrt{p} \cdot \exp(\sqrt{-1} \cdot \theta_p)$  ( $0 < \theta_p < \pi$ ) とおくと, 次の予想がある;

Sato 予想  $E$  が虚数乗法をもたないとき, 任意の  $0 < a < b < \pi$  に  
 対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{x \text{ 以下の素数 } p \text{ で } a \leq \theta_p \leq b\}}{\#\{x \text{ 以下の素数}\}} = \frac{2}{\pi} \int_a^b \sin^2 \theta \cdot d\theta.$$

Tate は, 上の Sato 予想 を次の様に言い換えた (Tate [11]);

$0 < m \in \mathbb{Z}$  に対し,

$$L_m(s) = \prod_p' \prod_{j=0}^m (1 - \pi_p^{m-j} \bar{\pi}_p^j p^{-s})^{-1}$$

とおくと,

Sato-Tate 予想  $E$  が虚数乗法をもたなうとき, 全ての  $0 < m \in \mathbb{Z}$

に対し,  $L_m(s)$  は  $\operatorname{Re} s \geq 1 + \frac{m}{2}$  で正則かつ  $0$ -点をもたなう。

Sato-Tate 予想 から Sato-予想 が導かれる (Serre [9] 参照)。

#### References.

- [1] Asai, T.: On certain Dirichlet series associated with Hilbert modular forms and Rankin's method.  
Math. Ann. 226 (1977) 81-94.
- [2] Deligne, P.: La conjecture de Weil I.  
Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1973) 273-307.
- [3] Deligne, P. and Serre, J.P.: Formes modulaires de poids 1.  
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 7 (1974) 507-530.
- [4] Kurokawa, N.: On some Euler products I, II.  
Proc. Japan Acad. 60 Ser. A No. 9 (1984) 335-338.  
ibid. No. 10 (1984) 365-368.
- [5] Kurokawa, N.: On the meromorphy of Euler products I, II.  
Proc. London Math. Soc. 53 (1986) 1-47.
- [6] Langlands, R.P.: Euler products. Yale Univ. (1971)

- [7] Langlands, R.P.: Base change for  $GL(2)$ , the theory of Saito-Shintani with applications.  
Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. (1975)
- [8] Langlands, R.P.: Automorphic representations, Shimura varieties and motives. Ein Marchen.  
Proc. Sympos. Pure Math. 33 part 2, Amer. Math. Soc.  
Providence, R.I. (1979) 205-246.
- [9] Serre, J.-P.: Abelian  $\ell$ -adic representations and elliptic curves. Benjamin, New York. (1968)
- [10] Takase, K.: On certain Dirichlet series associated with automorphic forms on  $SL(2, \mathbb{C})$ . (preprint)
- [11] Tate, J.: Algebraic cycles and poles of zeta functions.  
Proc. Purdue Univ. Conf. (1965) 93-110.
- [12] Tate, J.: Number theoretic background.  
Proc. Sympos. Pure Math. 33 part 2, Amer. Math. Soc.  
Providence, R.I. (1979) 3-26.
- [13] Weil, A.: Dirichlet series and automorphic forms.  
Lecture Notes in Math. 189 (1971) Springer-Verlag.